Lê Văn Luyện
email: lvluyen@yahoo.com

TOÁN RỜI RẠC

- **http://www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyen/trr**

Chương IV. Đại số Bool

Đại Số Bool

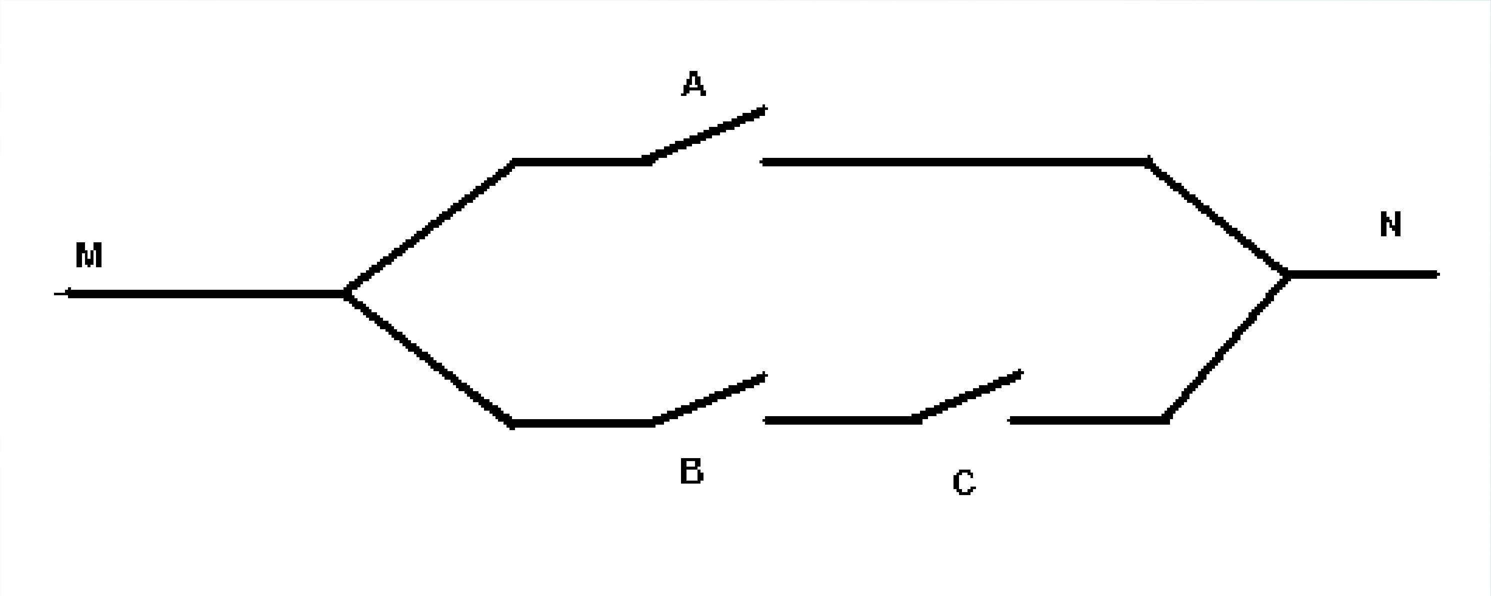
Hàm Bool

Biểu đồ karnaugh

Mạch logic

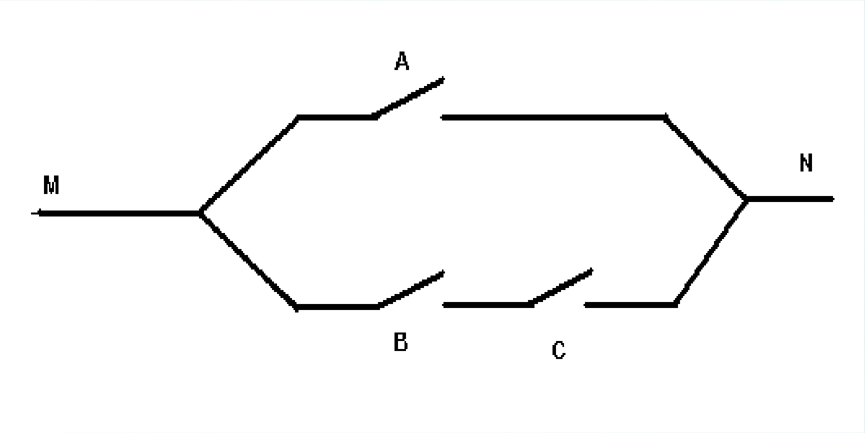
Mở đầu

Xét mạch điện như hình vẽ



Tùy theo cách trạng thái cầu dao A, B, C mà ta sẽ có dòng điện đi qua MN. Như vậy ta sẽ có bảng giá trị sau

Mở đầu



Câu hỏi: Khi mạch điện gồm nhiều cầu dao, làm sao ta có thể kiểm soát được.

Giải pháp là đưa ra công thức, với mỗi biến được xem như là một cầu dao

A	B	C	MN
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

I. Đại Số Bool

Một đại số Bool

$(A,\wedge,\vee)$ là một tập hợp $A \neq \varnothing$ với hai phép toán $\wedge$, $\vee$, tức là hai ánh xạ:

$$\wedge: \quad A\times A \rightarrow A$$

$$(x,y) \rightarrow x\wedge y$$

và $\vee: A\times A \rightarrow A$

$$(x,y)\rightarrow x\vee y$$

thỏa 5 tính chất sau:

I. Đại Số Bool

- Tính giao hoán: $\forall\ x, y \in A$

$$x \wedge y = y \wedge x;$$
$$x \vee y = y \vee x;$$

- Tính kết hợp: $\forall\ x, y, z \in A$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z);$$
$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z).$$

- Tính phân phối : $\forall\ x, y, z \in A$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

I. Đại Số Bool

- Có các phần tử trung hòa 1 và 0: $\forall x \in A$

$$x \wedge 1 = 1 \wedge x = x;$$

$$x \vee 0 = 0 \vee x = x.$$

- Mọi phần tử đều có phần tử bù: $\forall x \in A$, $\exists \overline{x} \in A$,

$$x \wedge \overline{x} = \overline{x} \wedge x = 0;$$

$$x \vee \overline{x} = \overline{x} \vee x = 1.$$

I. Đại Số Bool

Ví dụ.

Xét F là tập hợp tất cả các dạng mệnh đề theo n biến p_1, $p_2,\ldots,p_n$ với hai phép toán hội $\wedge$, phép toán tuyển $\vee$, trong đó ta đồng nhất các dạng mệnh đề tương đương. Khi đó F là một đại số Bool với phần tử 1 là hằng đúng 1, phần tử 0 là hằng sai 0, phần tử bù của dạng mệnh đề E là dạng mệnh đề bù $\overline{E}$

I. Đại Số Bool

Xét tập hợp B = {0, 1}. Trên B ta định nghĩa hai phép toán $\wedge, \vee$ như sau:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Khi đó, B trở thành một đại số Bool

II. Hàm Bool

Hàm Bool n biến là ánh xạ

$f : B^n \to B$, trong đó B = {0, 1}.

Như vậy hàm Bool n biến là một hàm số có dạng :

$f = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, trong đó mỗi biến trong $x_1, x_2,\ldots, x_n$ chỉ nhận hai giá trị 0, 1 và f nhận giá trị trong B = {0, 1}.

Ký hiệu **F_n** để chỉ tập các hàm Bool biến.

Ví dụ. Dạng mệnh đề $E = E(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ theo n biến $p_1, p_2,\ldots, p_n$ là một hàm Bool n biến.

Bảng chân trị

Xét hàm Bool n biến $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

Vì mỗi biến x_i chỉ nhận hai giá trị 0, 1 nên chỉ có 2^n trường hợp của bộ biến $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Do đó, để mô tả f, ta có thể lập bảng gồm 2^n hàng ghi tất cả các giá trị của f tùy theo 2^n trường hợp của biến. Ta gọi đây là **bảng chân trị của f**

Ví dụ

Xét kết qủa f trong việc thông qua một quyết định dựa vào 3 phiếu bầu x, y, z

Mỗi phiếu chỉ lấy một trong hai giá trị: 1 (tán thành) hoặc 0 (bác bỏ).

Kết qủa f là 1 (thông qua quyết định) nếu được đa số phiếu tán thành, là 0 (không thông qua quyết định) nếu đa số phiếu bác bỏ.

Hàm Bool

Khi đó f là hàm Bool theo 3 biến x, y, z có bảng chân trị như sau:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Các phép toán trên hàm Bool

Các phép toán trên F_n được định nghĩa như sau:

Phép cộng Bool $\vee$:

Với f, g $\in F_n$ ta định nghĩa tổng Bool của f và g:

$$\boxed{f \vee g = f + g - fg}$$

Suy ra

$\vee$	**0**	**1**
0	0	1
1	1	1

Các phép toán trên hàm Bool

$\forall x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in B^n$,

$$(f \vee g)(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x)$$

Dễ thấy

$f \vee g \in F_n$ và $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

Các phép toán trên hàm Bool

Phép nhân Bool $\wedge$:

Với f, g $\in F_n$ ta định nghĩa tích Bool của f và g

$$\boxed{f \wedge g = fg}$$

$\forall x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in B^n$,

$$(f \wedge g)(x) = f(x)g(x)$$

Dễ thấy:

$f \wedge g \in F_n$ và $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

Ta thường viết fg thay cho $f \wedge g$

Các phép toán trên hàm Bool

Phép lấy hàm bù:

Với f $\in F_n$ ta định nghĩa hàm bù của f như sau:

$$\boxed{\overline{f} = 1 - f}$$

Dạng nối rời chính tắc của Hàm Bool

Xét tập hợp các hàm Bool của n biến F_n theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$

- Mỗi hàm bool x_i hay $\overline{x_i}$ được gọi là từ đơn.
- *Đơn thức* là tích khác không của một số hữu hạn từ đơn.
- *Từ tối tiểu* là tích khác không của đúng n từ đơn.
- *Công thức đa thức là công thức biểu diễn hàm Bool thành tổng của các đơn thức.*
- *Dạng nối rời chính tắc* là công thức biểu diễn hàm Bool thành tổng của các từ tối tiểu.

$x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}, t, \bar{t}$ là các từ đơn.

$x\bar{y}z\bar{t}$; $\bar{x}\,\bar{y}t$ là các đơn thức.

$x\bar{y}z\bar{t}$ **là từ tối tiểu**

$$f = xy\bar{z} \vee \bar{y}z$$

III. Biểu đồ karnaugh

Công thức đa thức tối tiểu

Đơn giản hơn

Cho hai công thức đa thức của một hàm Bool :

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots . \vee m_k \ (F)$$

$$f = M_1 \vee M_2 \vee \ldots \vee M_l \ (G)$$

Ta nói rằng công thức F *đơn giản hơn* công thức G nếu tồn tại đơn ánh h: $\{1,2,..,k\} \rightarrow \{1,2,\ldots,l\}$ sao cho với mọi $i \in \{1,2,..,k\}$ thì số từ đơn của m_i không nhiều hơn số từ đơn của $M_{h(i)}$

Công thức đa thức tối tiểu

Đơn giản như nhau

Nếu F đơn giản hơn G và G đơn giản hơn F thì ta nói F và G *đơn giản như nhau*

** Công thức đa thức tối tiểu:

Công thức F của hàm Bool f được gọi là *tối tiểu* nếu với bất kỳ công thức G của f mà đơn giản hơn F thì F và G đơn giản như nhau

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Xét f là một hàm Bool theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với n = 3 hoặc 4.

Trường hợp n = 3:

f là hàm Bool theo 3 biến x, y, z. Khi đó bảng chân trị của f gồm 8 hàng. Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 8 ô, tương ứng với 8 hàng của bảng chân trị, được đánh dấu như sau:

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$
z	101	111	011	001
$\bar{z}$	100	110	010	000
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$

Với qui ước:

Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó x =1, bởi $\overline{x}$ thì tại đó x =0, tương tự cho y, z.

Các ô tại đó f bằng 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hoặc gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu được gọi là biểu đồ Karnaugh của f, ký hiệu là kar(f).

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$
z	101	111	011	001
$\overline{z}$	100	110	010	000
	$\overline{y}$	y	y	$\overline{y}$

Trường hợp n = 4:

f là hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t. Khi đó bảng chân trị của f gồm 16 hàng. Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 16 ô, tương ứng với 16 hàng của bảng chân trị, được đánh dấu như sau:

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z	1010	1110	0110	0010	$\bar{t}$
z	1011	1111	0111	0011	t
$\bar{z}$	1001	1101	0101	0001	t
$\bar{z}$	1000	1100	0100	0000	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

Với qui ước:

Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó x =1, bởi $\overline{x}$ thì tại đó x =0, tương tự cho y, z, t.

Các ô tại đó f bằng 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hoặc gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu được gọi là biểu đồ karnaugh của f, ký hiệu là kar(f).

Trong cả hai trường hợp, hai ô được gọi là ***kề nhau*** (theo nghĩa rộng), nếu chúng là hai ô liền nhau hoặc chúng là ô đầu, ô cuối của cùng một hàng (cột) nào đó. Nhận xét rằng, do cách đánh dấu như trên, hai ô kề nhau chỉ lệch nhau ở một biến duy nhất.

Định lý

Cho f, g là các hàm Bool theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó:

a) $kar(fg) = kar(f) \cap kar(g)$.

b) $kar(f \vee g) = kar(f) \cup kar(g)$.

c) kar(f) gồm đúng một ô khi và chỉ khi f là một từ tối tiểu

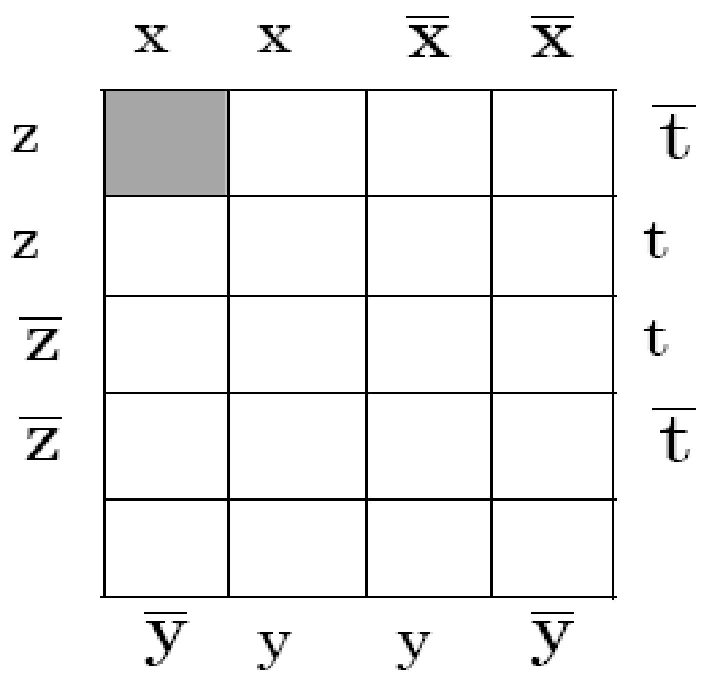
Tế bào

Tế bào là hình chữ nhật (theo nghĩa rộng) gồm 2^{n-k} ô

Nếu T là một tế bào thì T là biểu đồ karnaugh của một đơn thức duy nhất m, cách xác định m như sau: lần lượt chiếu T lên các cạnh, nếu toàn bộ hình chiếu nằm trọn trong một từ đơn nào thì từ đơn đó mới xuất hiện trong m.

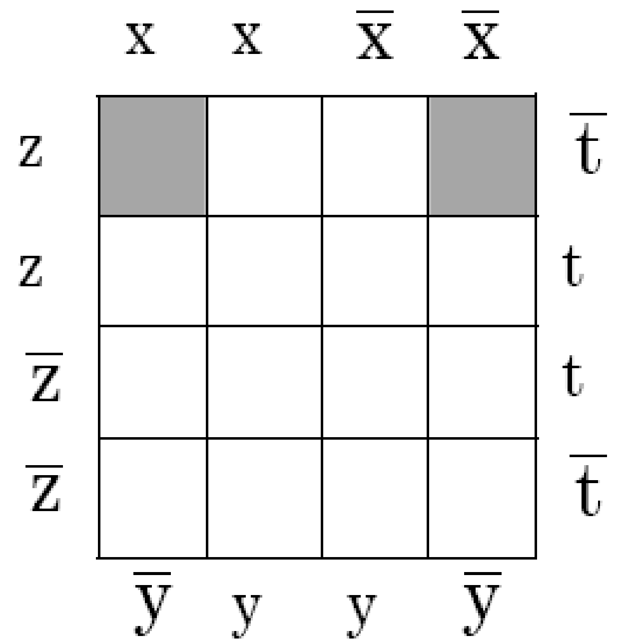
Ví dụ 1. Xét các hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t.

Biểu đồ karnaugh của đơn thức $x\bar{y}z\bar{t}$ là



Ví dụ 2. Xét các hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t.

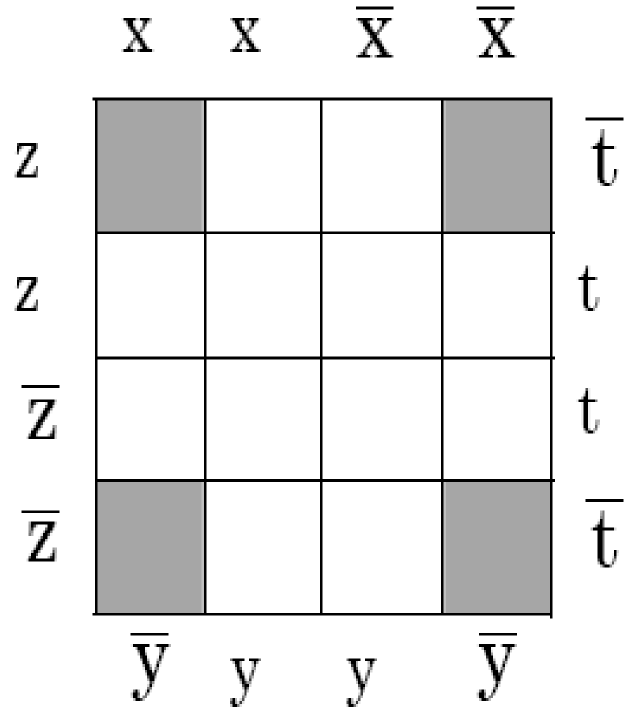
Biểu đồ karnaugh của đơn thức $\bar{y}z\bar{t}$ là



Ví dụ 3.

Xét các hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t.

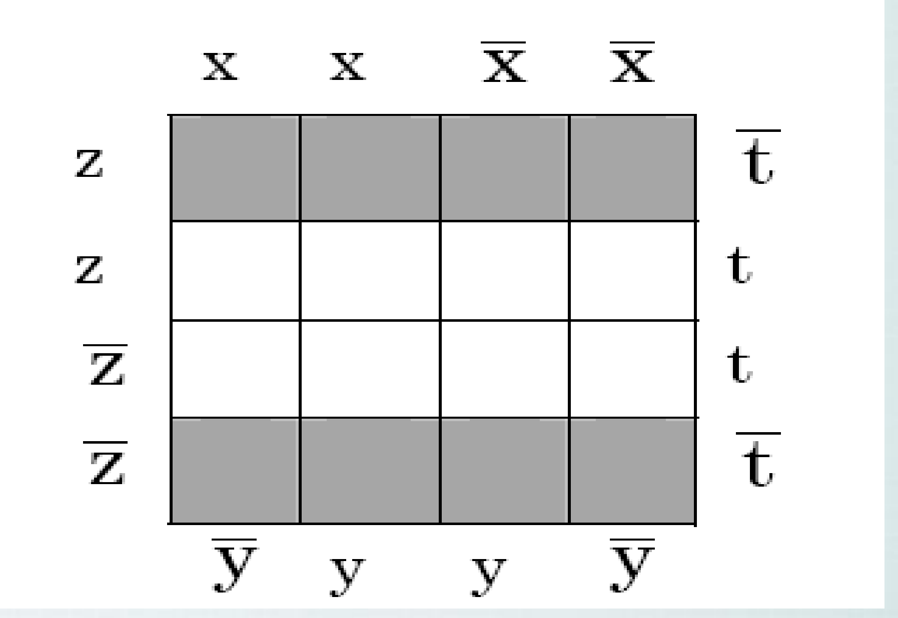
Biểu đồ karnaugh của đơn thức $\bar{y}\bar{t}$ là



Ví dụ 4.

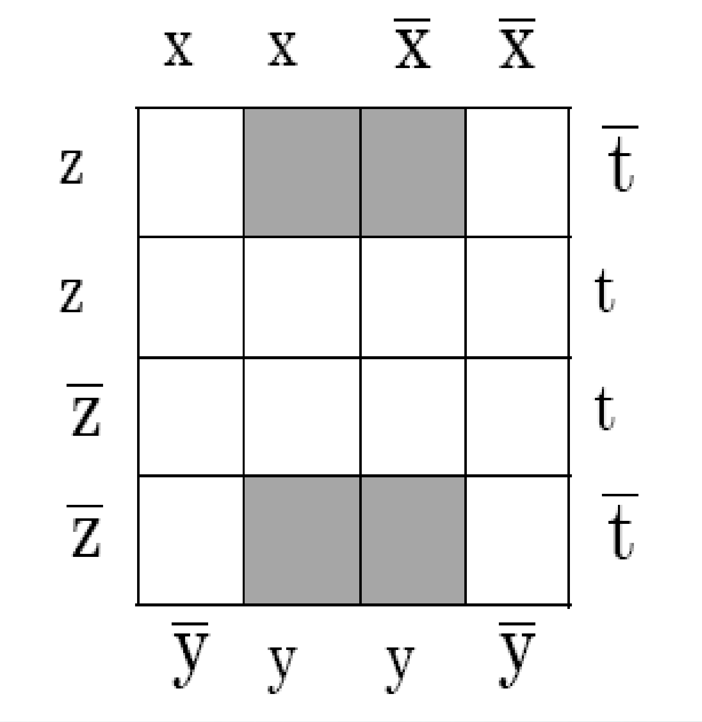
Xét các hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t.

Biểu đồ karnaugh của đơn thức $\overline{t}$ là



Ví dụ 5. Xét các hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t.

Tế bào sau:



Là biểu đồ Karnaugh của đơn thức nào?

là biểu đồ karnaugh của đơn thức $y\bar{t}$.

Tế bào lớn.

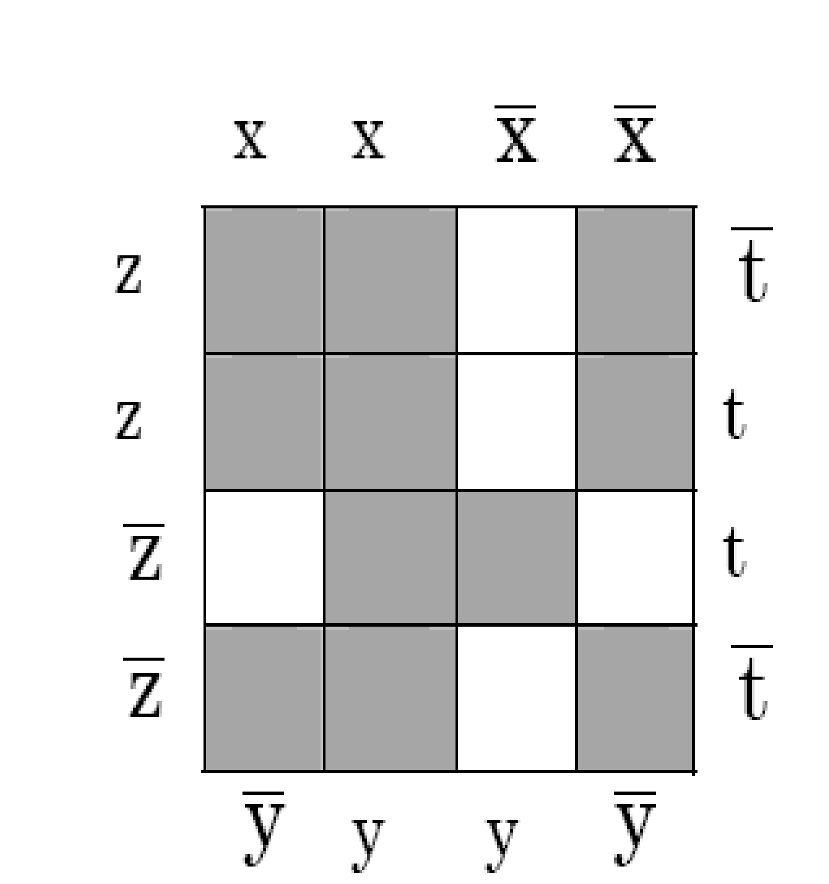
Cho hàm Bool f. Ta nói T là một tế bào lớn của kar(f) nếu T thoả hai tính chất sau:

a) T là một tế bào và $T \subseteq \text{kar}(f)$.

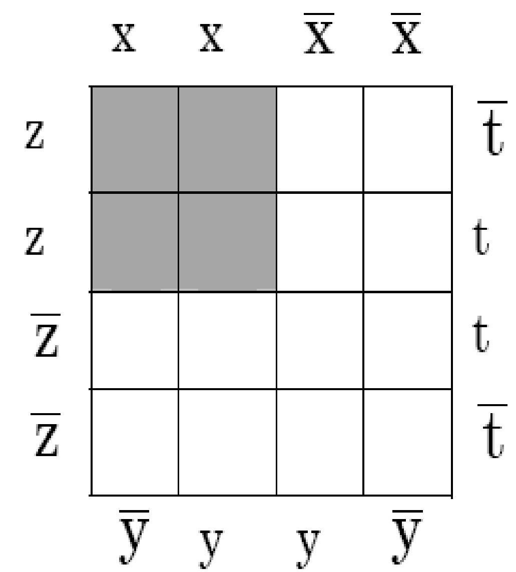
b) Không tồn tại tế bào T' nào thỏa $T' \neq T$ và

$$T \subseteq T' \subseteq \text{kar}(f).$$

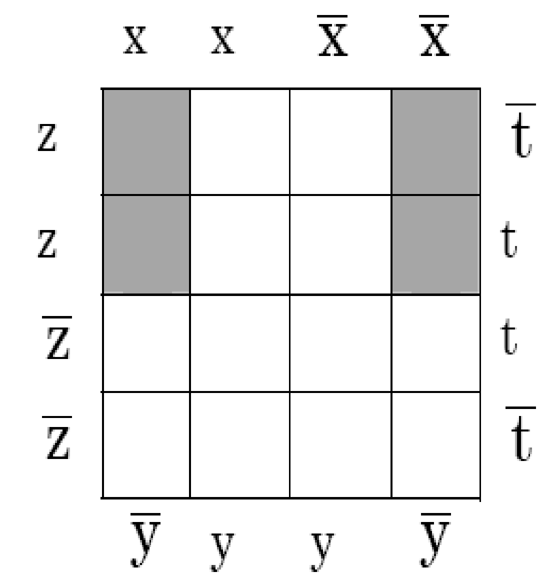
Ví dụ. Xét hàm Bool f theo 4 biến x, y, z, t có biểu đồ karnaugh như sau:



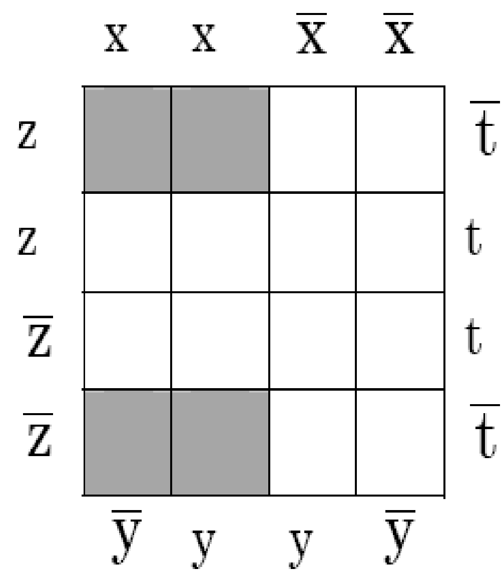
Kar(f) có 6 tế bào lớn như sau:



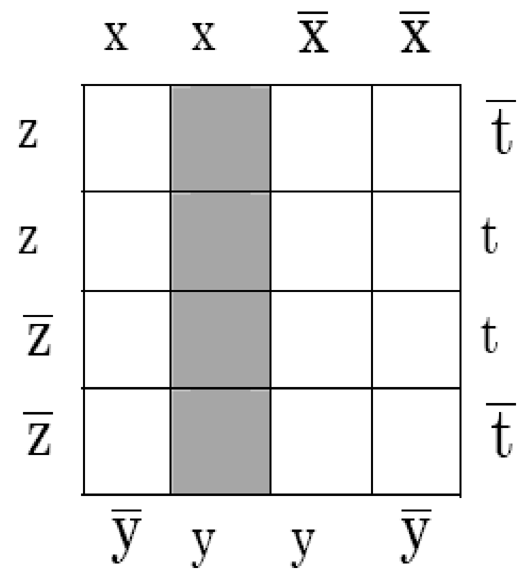
xz



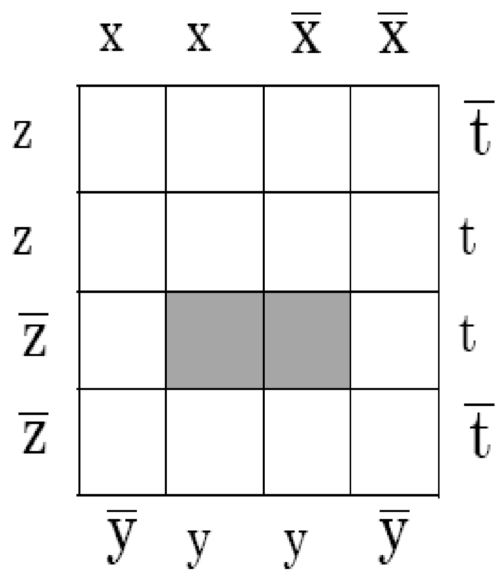
$\bar{y}z$


x x $\bar{x}$ $\bar{x}$
z z $\bar{z}$ $\bar{z}$
$\bar{t}$ t t $\bar{t}$
$\bar{y}$ y y $\bar{y}$

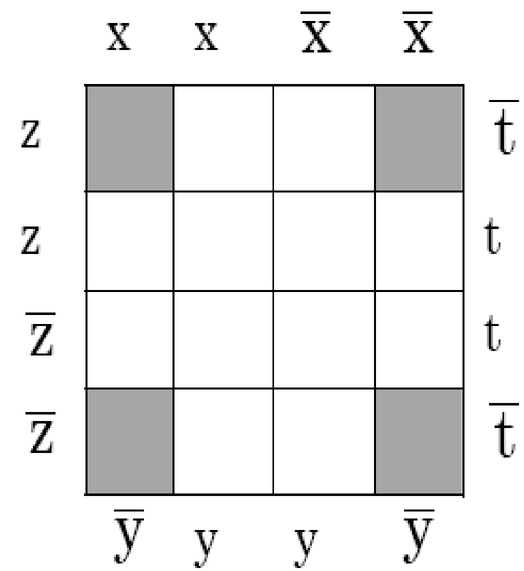
$x\bar{t}$


x x $\bar{x}$ $\bar{x}$
z z $\bar{z}$ $\bar{z}$
$\bar{t}$ t t $\bar{t}$
$\bar{y}$ y y $\bar{y}$

xy



$y\bar{z}t$



$\bar{y}\bar{t}$

Thuật toán tìm đa thức tối tiểu.

Bước 1: Vẽ biểu đồ karnaugh của f.

Bước 2: Xác định tất cả các tế bào lớn của kar(f).

Bước 3: Xác định các tế bào lớn m nhất thiết phải chọn.

Ta nhất thiết phải chọn tế bào lớn T khi tồn tại một ô của kar(f) mà ô này chỉ nằm trong tế bào lớn T và không nằm trong bất kỳ tế bào lớn nào khác.

Bước 4: Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn

Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 đã phủ được kar(f) thì ta có duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của kar(f).

Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 chưa phủ được kar(f) thì:

Xét một ô chưa bị phủ, sẽ có ít nhất hai tế bào lớn chứa ô này, ta chọn một trong các tế bào lớn này. Cứ tiếp tục như thế ta sẽ tìm được tất cả các phủ gồm các tế bào lớn của kar(f).

Loại bỏ các phủ không tối tiểu, ta tìm được tất cả các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của kar(f).

❖ Bước 5: Xác định các công thức đa thức tối tiểu của f.

Từ các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của kar(f) tìm được ở bước 4 ta xác định được các công thức đa thức tương ứng của f

Loại bỏ các công thức đa thức mà có một công thức đa thức nào đó thực sự đơn giản hơn chúng.

Các công thức đa thức còn lại chính là các công thức đa thức tối tiểu của f.

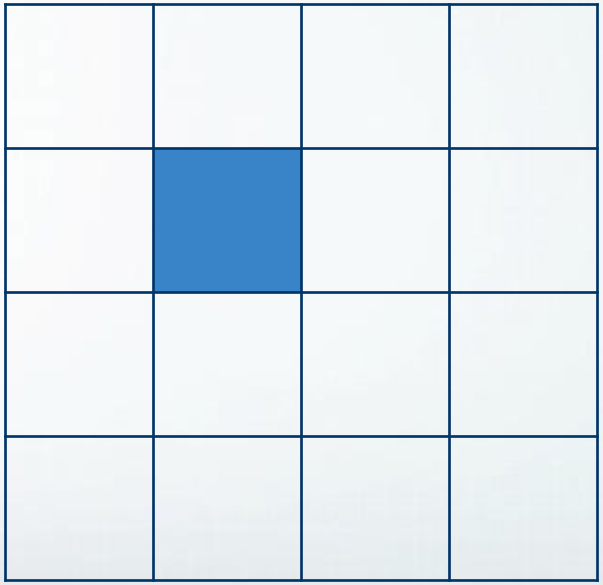
Ví dụ 1

- Tìm tất cả các công thức đa thức tối tiểu của hàm Bool:

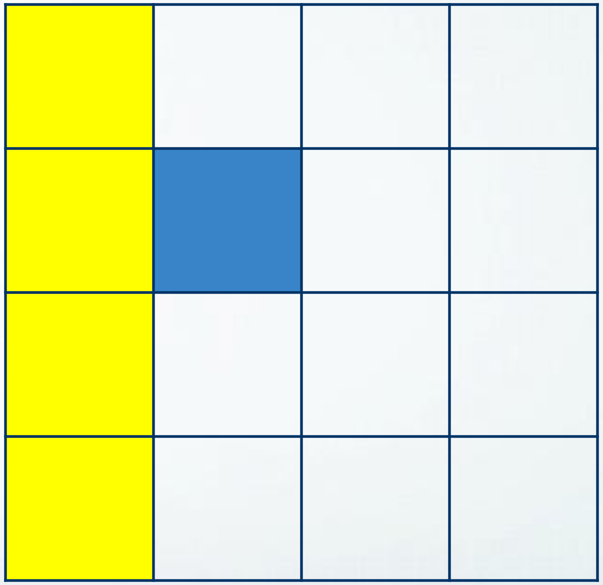
$$f(x,y,z,t) = xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy(\bar{z} \vee \bar{t})$$

$$= xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

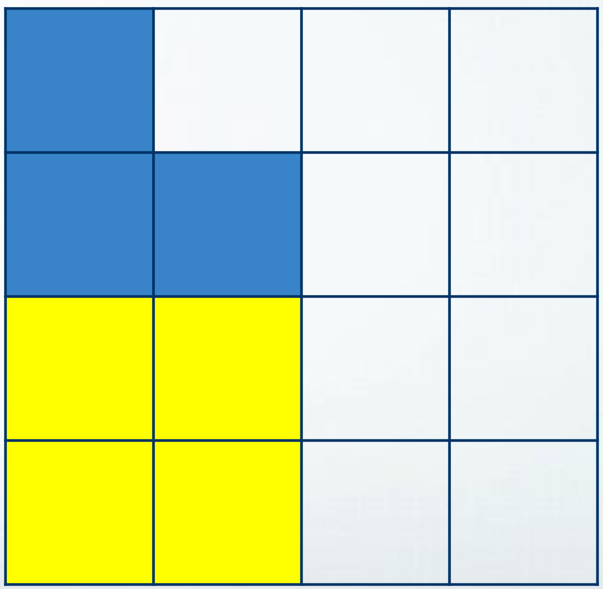
$$f(x,y,z,t)=\color{red}{xyzt}\color{black}{}\vee x\bar{y}\vee x\bar{z}\vee yz\vee xy\bar{z}\vee xy\bar{t}$$



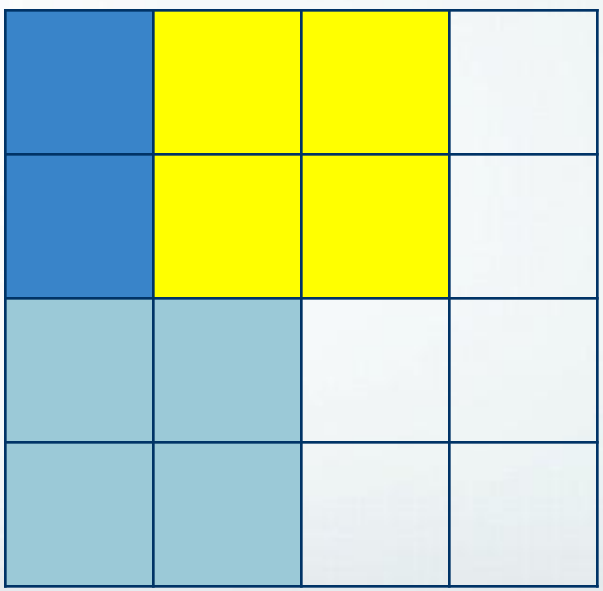
$$f(x,y,z,t) = xyzt \vee {\color{red}x\bar{y}} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$



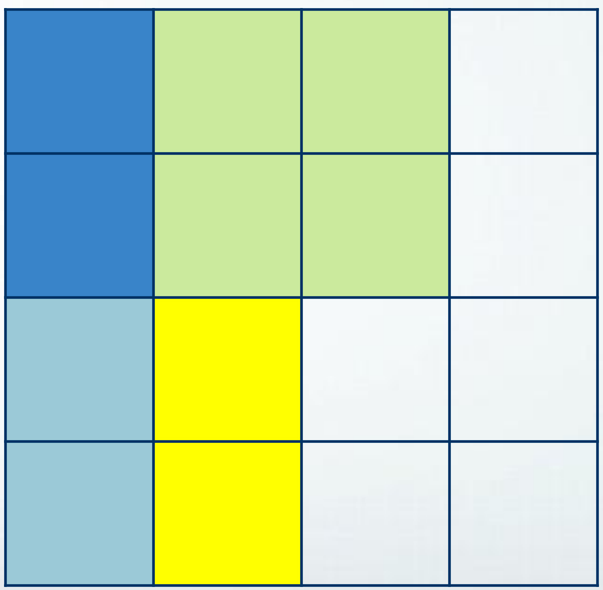
$$f(x,y,z,t) = xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$



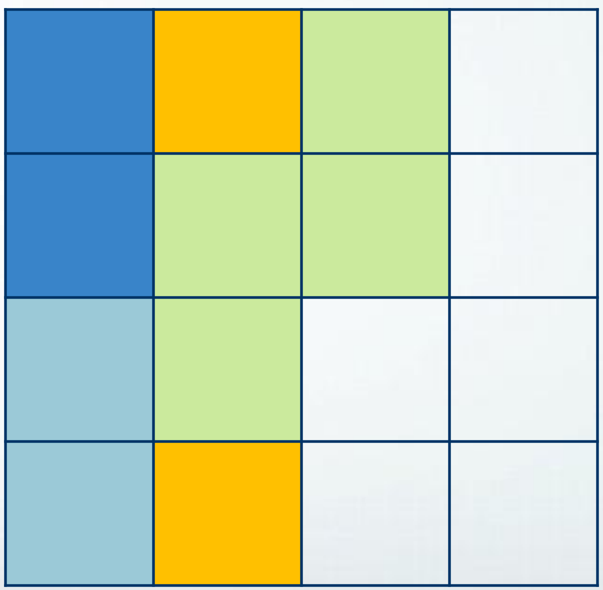
$$f(x,y,z,t)=xyzt\vee x\bar{y}\vee x\bar{z}\vee yz\vee xy\bar{z}\vee xy\bar{t}$$



$$f(x,y,z,t) = xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

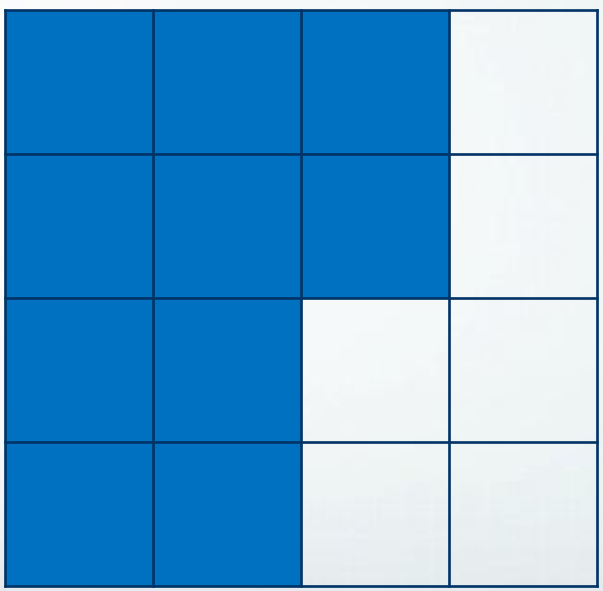


$$f(x,y,z,t)=xyzt\vee x\bar{y}\vee x\bar{z}\vee yz\vee xy\bar{z}\vee xy\bar{t}$$



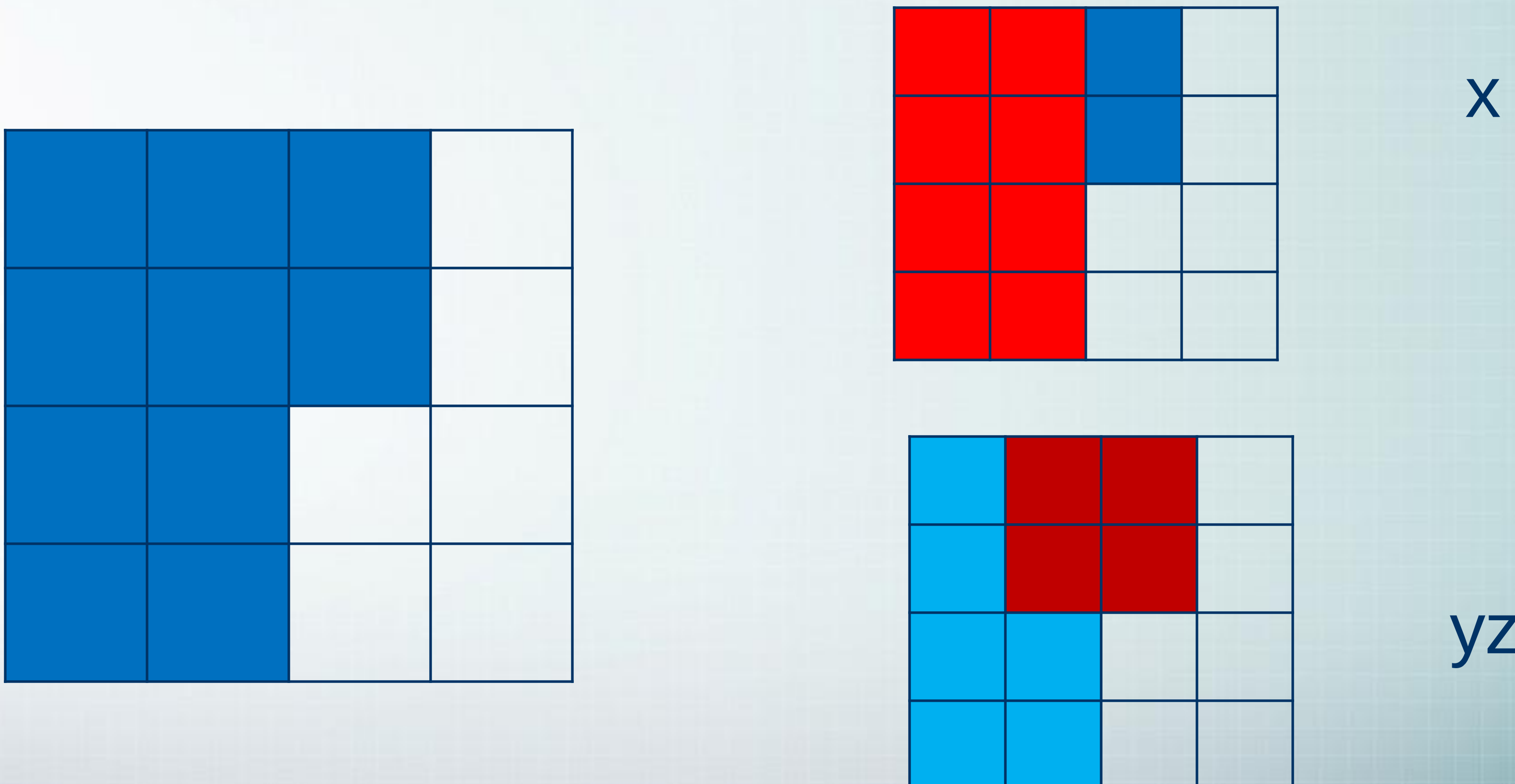
$$f(x,y,z,t) = xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

Bước 1:Vẽ kar(f):



$$f(x,y,z,t) = xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

Bước 2: Kar(f) có các tế bào lớn như sau:



$$f(x,y,z,t) = xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

Bước 3: Xác định các tế bào lớn nhất thiết phải chọn:

- Ô 1 nằm trong một tế bào lớn duy nhất x. Ta chọn x.
- Ô 3 nằm trong một tế bào lớn duy nhất yz. Ta chọn yz.

1	2	3	
4	5	6	
7	8		
9	10		

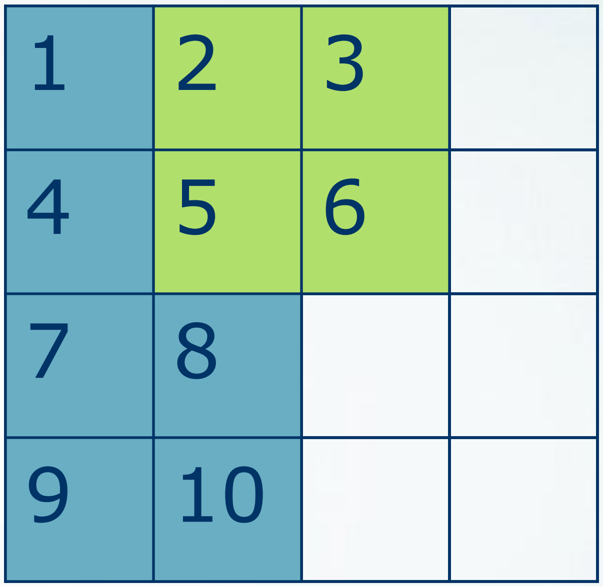
1	2		
4	5		
7	8		
9	10		

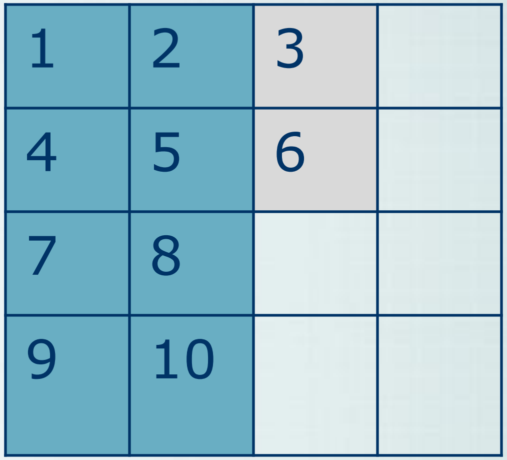
x

	2	3	
	5	6	

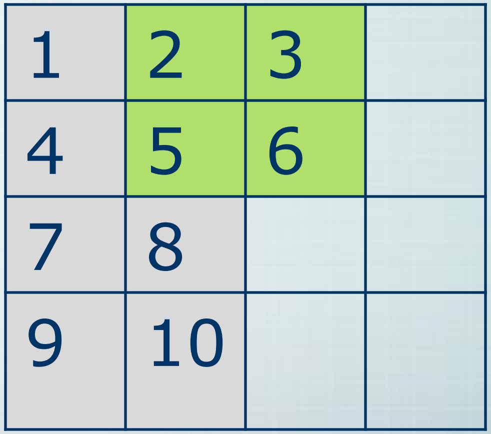
yz

Bước 4: Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn





x



yz

Ta được duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của kar(f):

x v yz.

$$f(x,y,z,t) = xyzt \vee xy^{-} \vee xz^{-} \vee yz \vee xyz^{-} \vee xyt^{-}$$

- Bước 5: Xác định các công thức đa thức tối tiểu của f.

  Ứng với phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn tìm được ở bước 4 ta tìm được duy nhất một công thức đa thức tối tiểu của f:

$$x \vee yz$$

$$f = \bar{y}zt \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee y\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}z\bar{t}$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

B1: Vẽ Kar(f)

$$f = \bar{y}zt \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee y\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}z\bar{t}$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$\bar{z}\bar{t}$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$\bar{x}\bar{t}$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

xzt

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

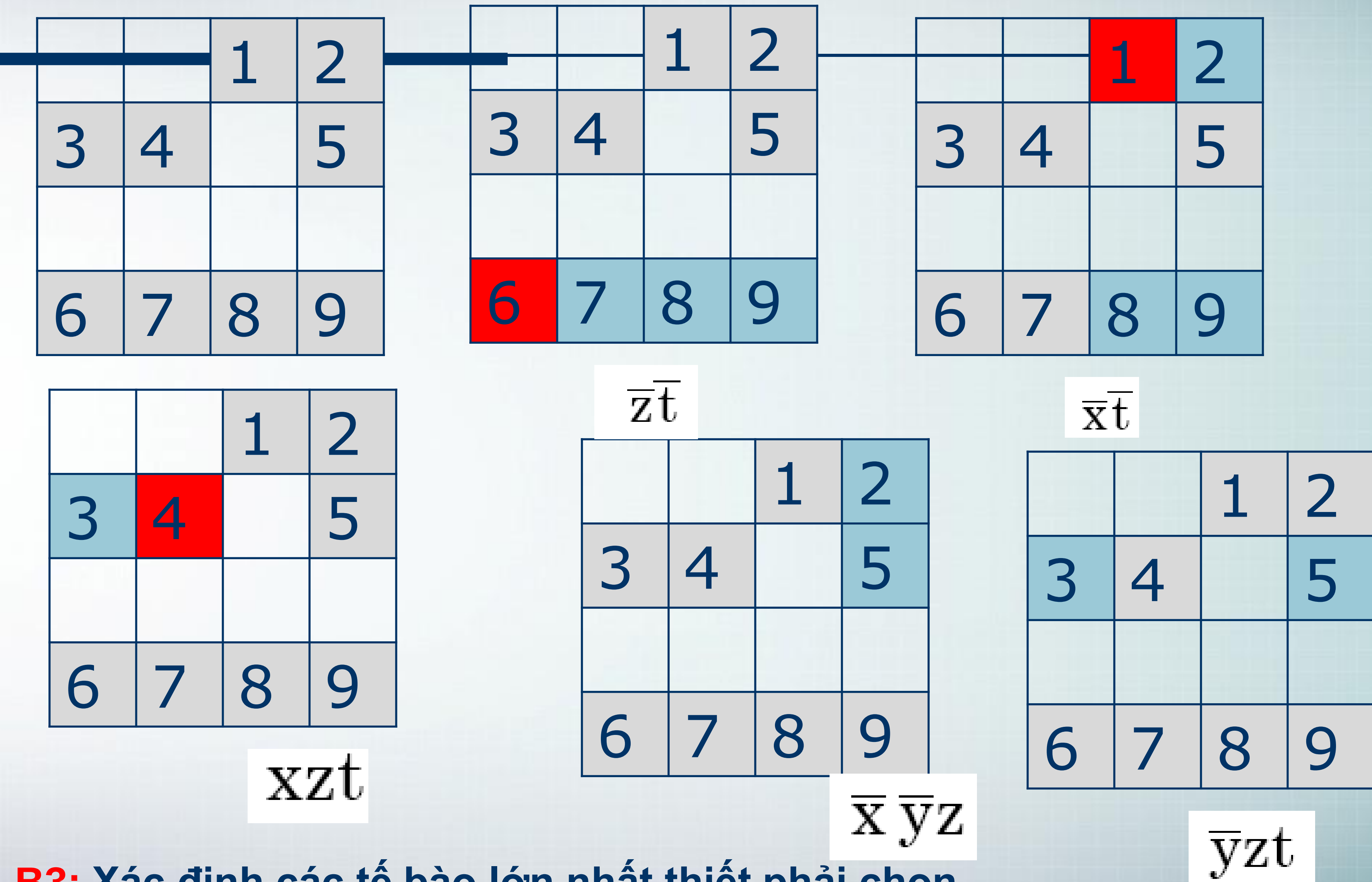
$\bar{x}\,\bar{y}z$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$\bar{y}zt$

B2: Xác định tế bào lớn

$$f = \bar{y}zt \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee y\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}z\bar{t}$$



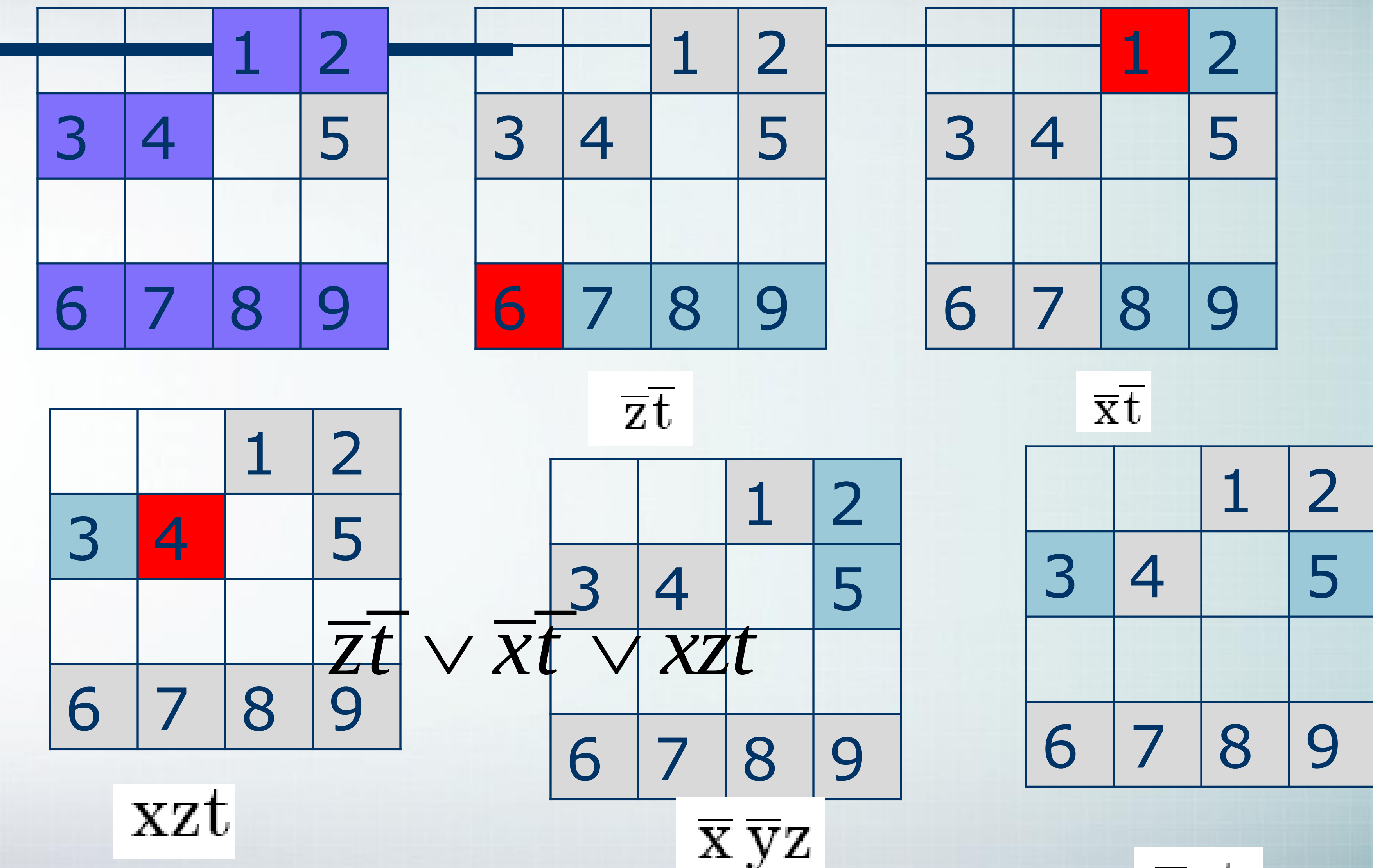
B3: **Xác định các tế bào lớn nhất thiết phải chọn**

$$f = \bar{y}zt \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee y\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee x\bar{z}\bar{t}$$

❖ **Bước 3: Xác định các tế bào lớn nhất thiết phải chọn**

- Ô 6 nằm trong một tế bào lớn duy nhất $\bar{z}\bar{t}$. Ta chọn $\bar{z}\bar{t}$
- Ô 1 nằm trong một tế bào lớn duy nhất $\bar{x}\bar{t}$. Ta chọn $\bar{x}\bar{t}$
- Ô 4 nằm trong một tế bào lớn duy nhất xzt . Ta chọn xzt

$$f = \bar{y}zt \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee y\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}z\bar{t}$$



B4: **Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn**

$$f = \overline{y}zt \vee \overline{y}\overline{z}\overline{t} \vee y\overline{z}\overline{t} \vee xyzt \vee \overline{x}z\overline{t}$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

Còn lại ô 5 chưa bị phủ

Ô 5 nằm trong 2 tế bào lớn: 2 cách chọn

$$\overline{z}\overline{t} \vee \overline{x}\overline{t} \vee xzt$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$\overline{x}\,\overline{y}z$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$\overline{y}zt$

B4: Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn

$$f = \bar{y}zt \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee y\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}z\bar{t}$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

Còn lại ô 5 chưa bị phủ

Ô 5 nằm trong 2 tế bào lớn: 2 cách chọn

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$$\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{x}\bar{y}z$$

$\bar{x}\,\bar{y}z$

B4: Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn

$$f = \overline{y}zt \vee \overline{y}\overline{z}\overline{t} \vee y\overline{z}\overline{t} \vee xyzt \vee \overline{x}z\overline{t}$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

Còn lại ô 5 chưa bị phủ
Ô 5 nằm trong 2 tế bào lớn: 2 cách chọn

$$\overline{z}\overline{t} \vee \overline{x}\overline{t} \vee xzt \vee \overline{y}zt$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$\overline{y}zt$

B4: Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn

$$f = \bar{y}zt \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee y\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}z\bar{t}$$

❖ Bước 5: Xác định các công thức đa thức tối tiểu của f

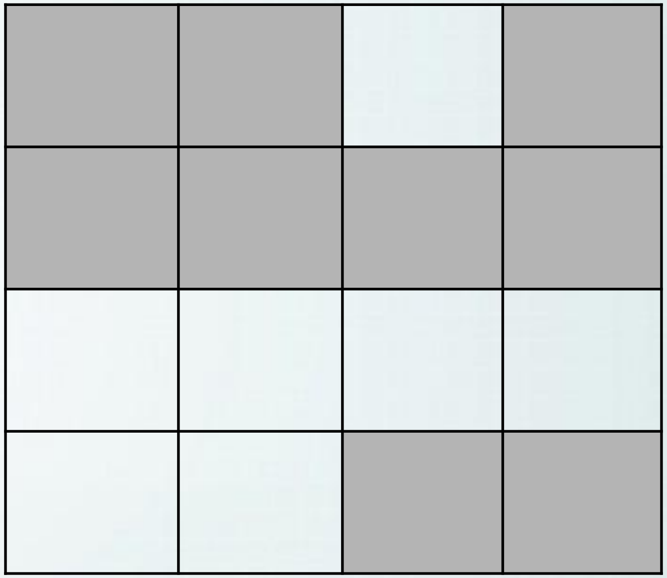
$$\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{x}\bar{y}z$$

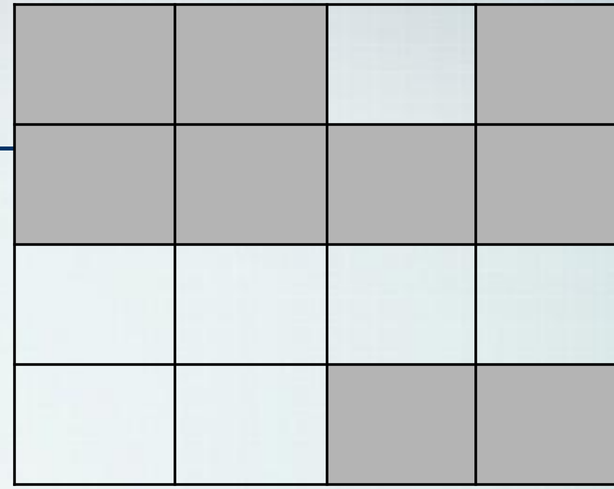
$$\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{y}zt$$

Hãy xác định các công thức đa thức tối tiểu của hàm Bool:

$$f = xz(\bar{y} \vee \bar{t}) \vee \bar{x}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee z(yt \vee \bar{x}\,\bar{y})$$

❖ Biểu đồ Karnaugh:





- Các tế bào lớn:

$$xz,\ \bar{y}z,\ zt,\ \bar{x}\,\bar{z}\,\bar{t}\ ,\ \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{t}$$

- Các tế bào lớn bắt buộc phải chọn là

$$xz,\ zt,\ \bar{x}\,\bar{z}\,\bar{t}$$

- Còn lại ô (1,4) có thể nằm trong 2 tế bào lớn

$$\bar{y}z,\ \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{t}$$

- Do đó có 2 công thức đa thức tương ứng với phủ tối tiểu:

$$f = xz \vee zt \vee \bar{x}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{t}$$

$$f = xz \vee zt \vee \bar{x}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{y}z$$

- Trong đó chỉ có công thức thứ hai là tối tiểu

IV. Mạng logic (Mạng các cổng)

Input: x_1, x_2,..., x_n là các biến Bool

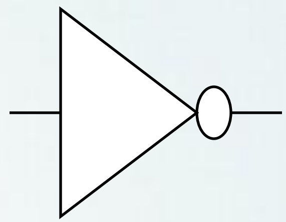
Output $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ là hàm Bool.

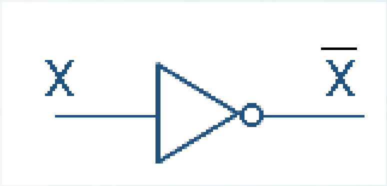
Ta nói mạng logic trên tổng hợp hay biểu diễn hàm Bool f

Các cổng

❖ NOT:

Kí hiệu cổng





Bảng chân trị

X	**not** X
0	1
1	0

Input

Output

Nếu đưa mức HIGH vào ngõ vào của cổng, ngõ ra sẽ là mức LOW và ngược lại.

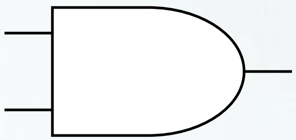
$$F(x) = \overline{x}$$

Các cổng

- **AND:**

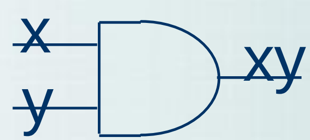
Cổng AND có ít nhất 2 ngõ vào

Ngõ ra là 1 khi tất cả các ngõ vào là 1, ngược lại là 0



x and y

$$x \bullet y, x \wedge y, x \& y, xy$$

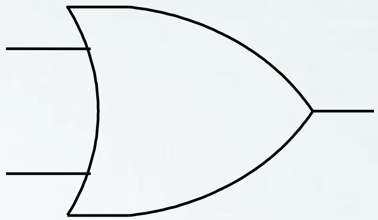


Bảng chân trị

X	Y	X **and** Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Các cổng

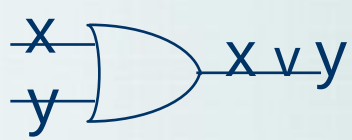
- **OR:**



Cổng OR có ít nhất là 2 ngõ vào

Ngõ ra là 1, nếu có một ngõ vào là 1, ngược lại là 0

$\boxed{\text{x or y}}$ $x + y, x \vee y, x|y$

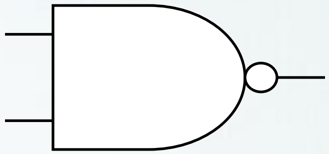


Bảng chân trị:

X	Y	X **or** Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Các cổng

- **NAND:**



Là cổng bù của AND

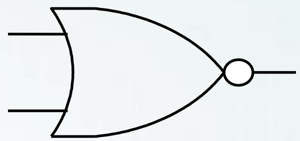
Có ngõ ra là ngược lại với cổng AND

$$X \ nand \ Y = not\,(X \ and \ Y) = \overline{xy}$$

X	Y	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Các cổng

- **NOR:**



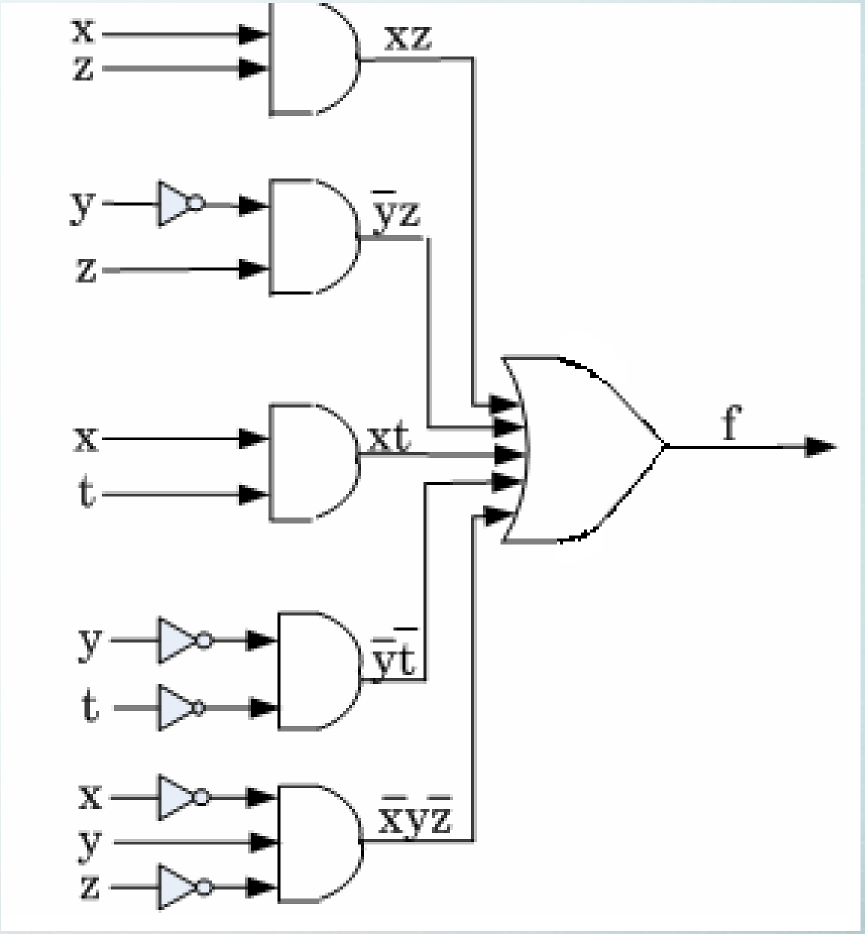
Là cổng bù của OR

Có ngõ ra ngược với cổng OR

X nor Y = not (X or Y) = $\overline{x \vee y}$

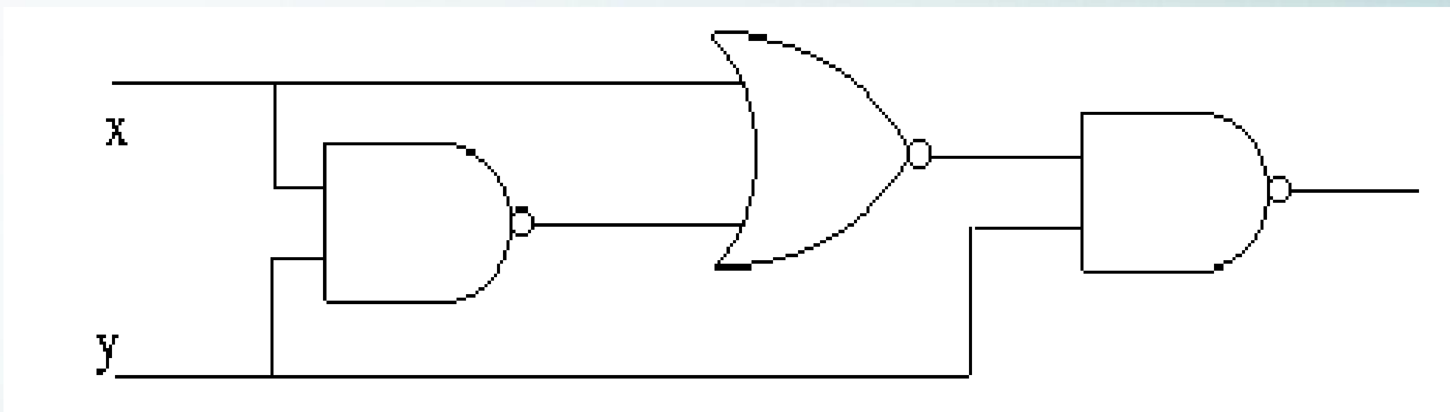
X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Ví dụ $f = xz \vee \overline{y}z \vee xt \vee \overline{y}\overline{t} \vee \overline{x}y\overline{z}$

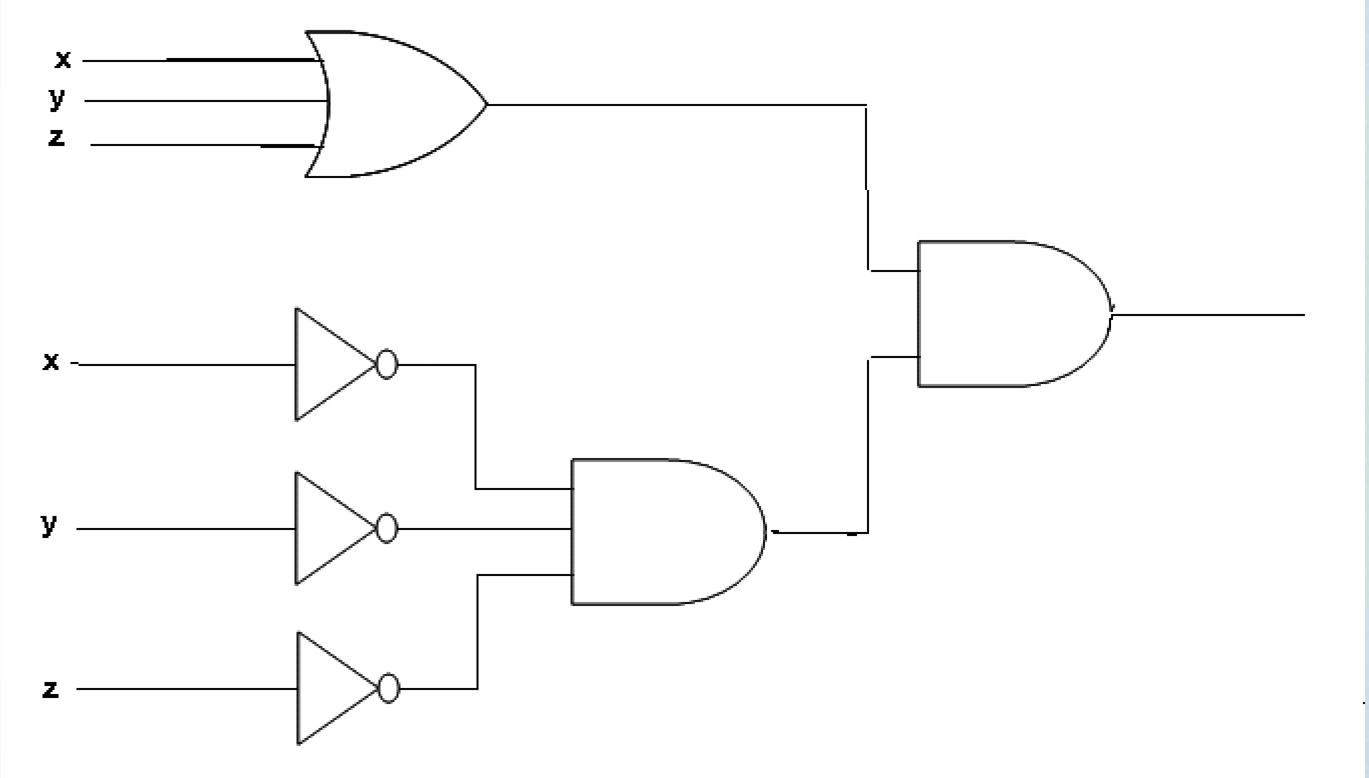


Ví dụ

$$\overline{\overline{x \vee \overline{xy}}\;y}$$



Cho sơ đồ



Viết biểu thức f

$$f(x,y,z) = (x \vee y \vee z)\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$

. Thiết kế một mạch điều khiển bởi 2 cầu dao

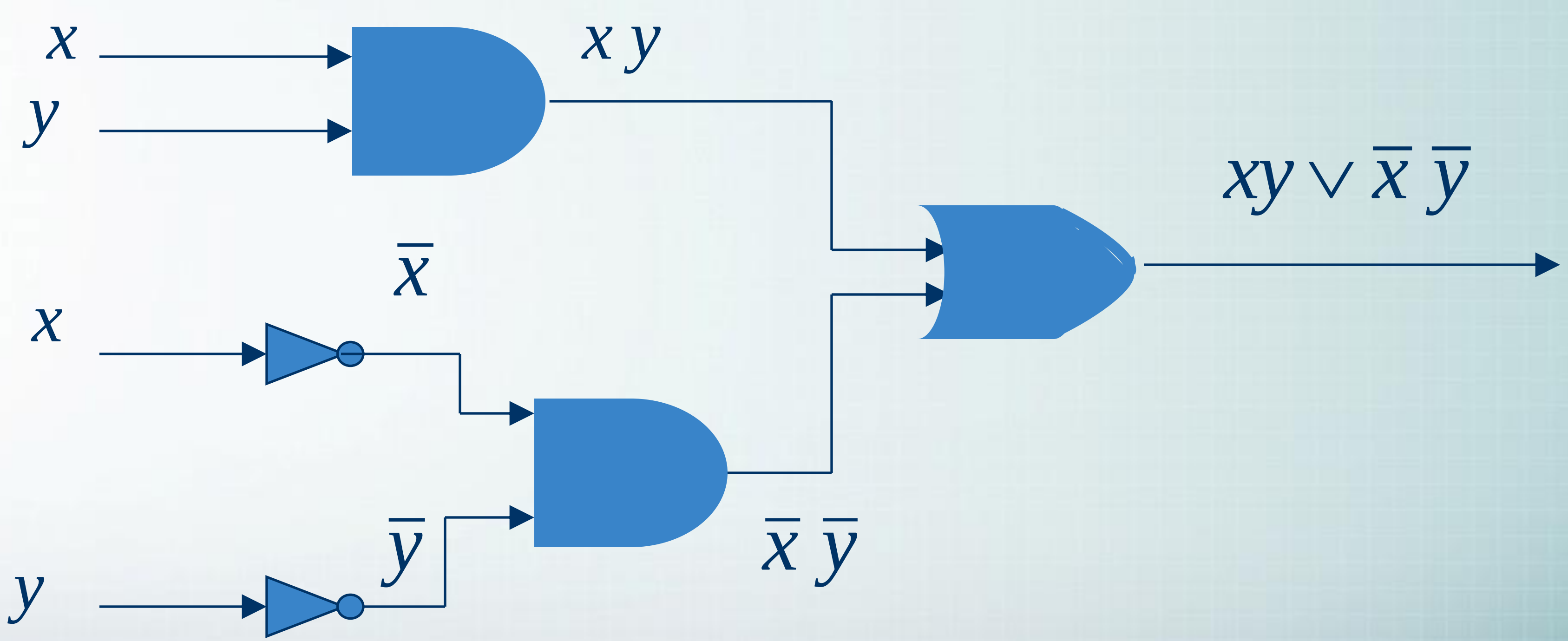
Mỗi cầu dao xem như là biến *x*, *y* : 1 là bật 0 là tắt

Cho *F*(*x*, *y*) =1 khi đèn sáng và 0 khi đèn tắt

Giả sử *F*(x, y) =1 khi cả hai cái đều bật hoặc cùng tắt

Ta có bảng chân trị sau

x	***y***	***F*(*x*, *y*)**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



x
y
xy
$\bar{x}$
x
$\bar{y}$
y
$\bar{x}\,\bar{y}$
$xy \vee \bar{x}\,\bar{y}$

. Thiết kế một mạch điều khiển bởi 3 cầu dao

Mỗi cầu dao xem như là biến *x*, *y* : 1 là bật 0 là tắt

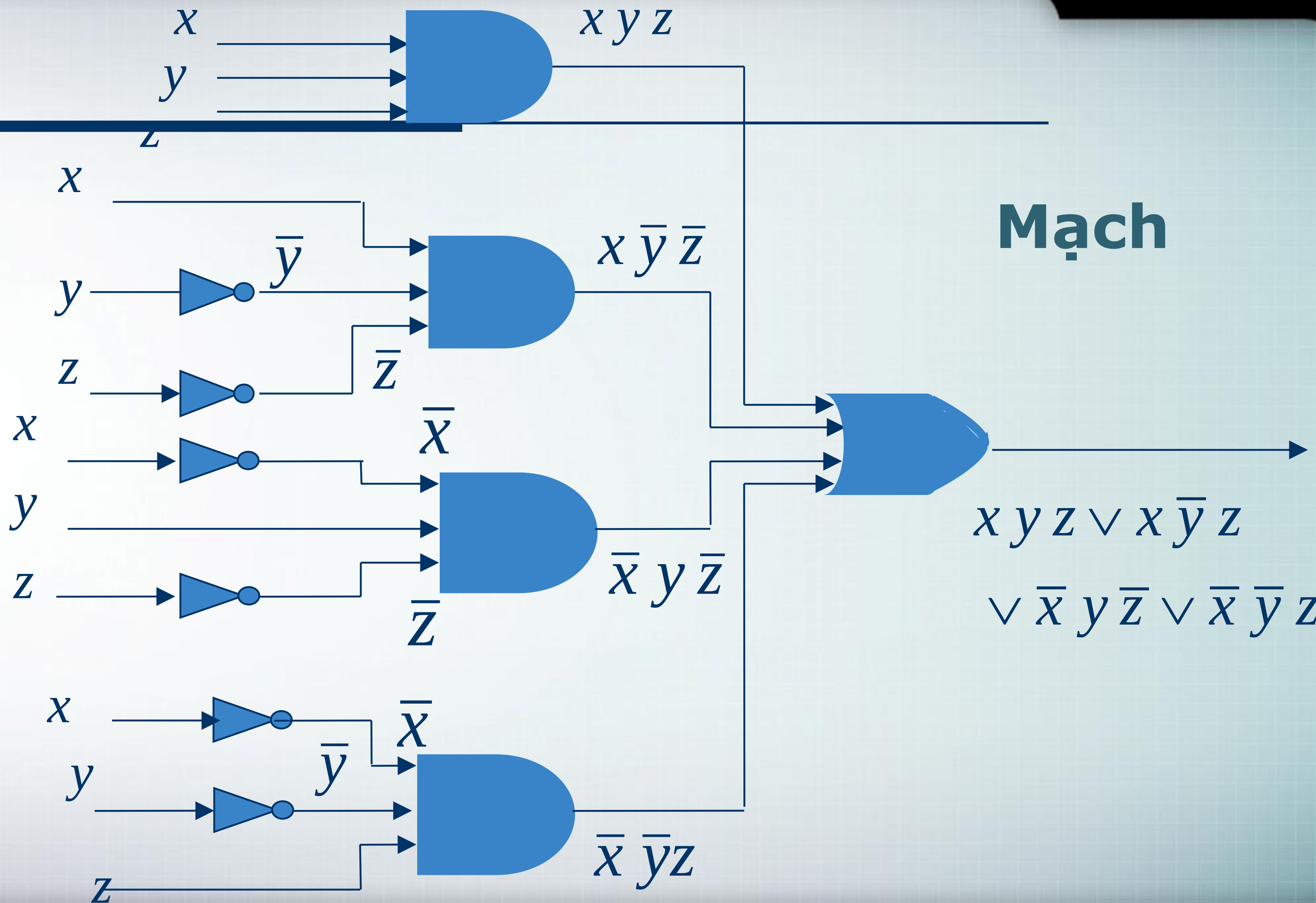
Cho *F*(*x*, *y*) =1 khi đèn sáng và 0 khi đèn tắt

Giả sử *F*(x,y,z) =1 khi 1 hoặc 3 cái đều bật

Ta có bảng chân trị sau

x	*y*	*z*	*F(x, y)*
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Mạch



x
y
z
xyz
x
y
$\bar{y}$
z
$\bar{z}$
$x\bar{y}\bar{z}$
x
$\bar{x}$
y
z
$\bar{z}$
$\bar{x}y\bar{z}$
x
$\bar{x}$
y
$\bar{y}$
z
$\bar{x}\bar{y}z$
$xyz \vee x\bar{y}z$
$\vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$